## Билет №14

1. ***Фазовый портрет нелинейных систем. Бифуркации. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы: слияние с исчезновением устойчивого и неустойчивого циклов, вынужденные колебания нелинейного осциллятора, бифуркация слияния точек узел-седло.***

*Фазовый портрет нелинейных систем.*

Лекции + Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Баутин Н.Н., Леонтович Е.

Будем считать $u(t)=0$

Поведение НЛС **всегда** зависит от н.у.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0 \qquad (5.1)$$

$$\dot{x} = \underset{n\times n}{A} x \qquad (5.2)$$ $x$ – $1\times n$ – в-р состояний

У НЛС может быть несколько особых точек с разной динамикой и разной устойчивостью. НУ определяют то, ближе к какой из них мы окажемся. Т.е. какая будет влиятельнее, такая и определит динамику.

Геометрическая интерпретация ур-ния (5.1) м.б. дана как семейство кривых в простр... размерности $n$ с координатами $\{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$.

1) $n$-мерное пр-во – фазовое пространство
2) траектории, явл. решениями (5.1) – фазовые траектории
3) Фазовый портрет – представление фазовых траекторий в фазовом пространстве
4) Изображающая точка – решение (5.1) на фазовой кривой в момент времени $t$ при заданных н.у.

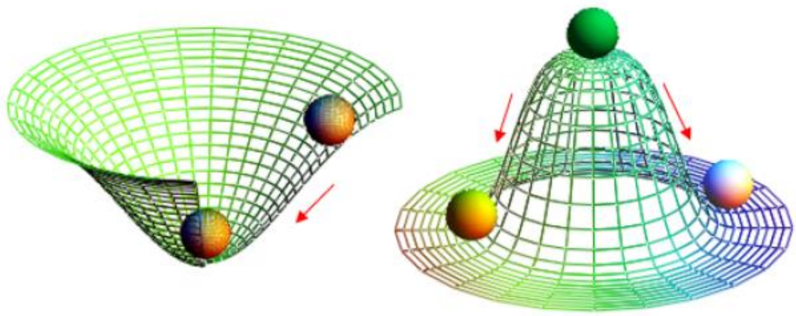


**Рис. 1** Устойчивая система Неустойчивая система

Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.
Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов использует фазовое пространство, в котором строятся фазовые портреты (см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются особые точки – точки положения равновесия, которые помогают, без решения дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть устойчивыми или
неустойчивыми. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2).

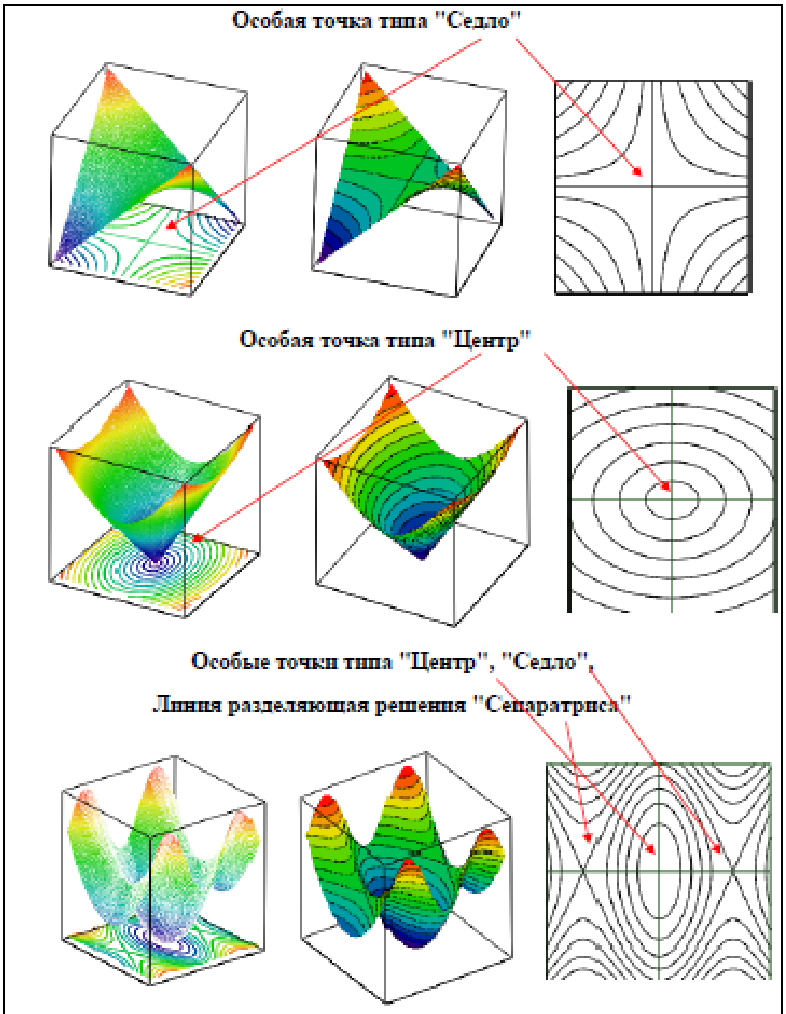



Рис.2. Фазовые портреты динамических систем

Элементы фазовых портретов нелинейных систем:

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ

- изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве динамич. системы, изображающая периодич. движение. В окрестности П. ц. фазовые траектории либо удаляются от него (неустойчивый П. ц.), либо неограниченно приближаются к нему - "наматываются" на него (устойчивый П. ц.). Поведение траекторий в окрестности П. ц. связано со значениями его мультипликаторов (см. Бифуркация). Устойчивый П. ц. является матем. образом периодич. автоколебаний.

СЕПАРАТРИСА

- траектория динамической системы с двумерным фазовым пространством, стремящаясяк седловому состояниюравновесия при времени $t \to \infty$ (устойчивая С.) или при $t \to -\infty$ (неустойчиваяС.). Ес ли С. стремится к седлу при $t \to \pm\infty$,то её (вместе с седлом) называют петлей С.
Надо добавить другое определение сепаратрисы. Тут очень жесткое определение.

*Бифуркации. Проявление эффектов бифуркационной памяти в поведении динамической системы: слияние с исчезновением устойчивого и неустойчивого циклов, вынужденные колебания нелинейного осциллятора, бифуркация слияния точек узел-седло.*

$$J\ddot{x} + h\dot{x} = M_p(\varphi)$$

Уравнение движения лодки.

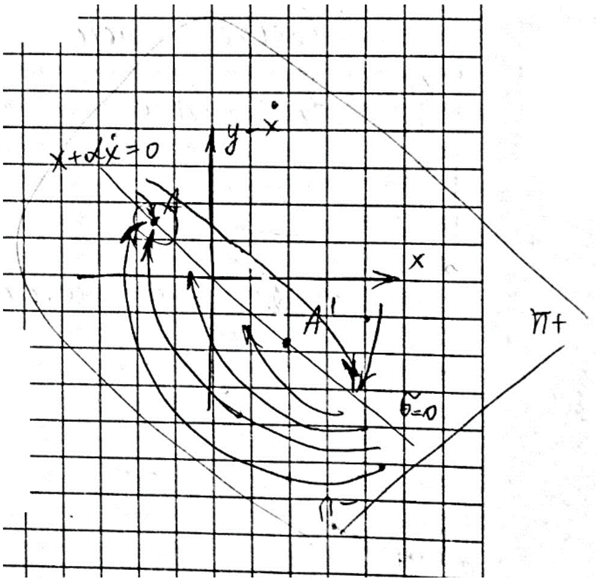
$x, \varphi$ - угол откл.
$J$ - момент инерции отн-но цм
$h$ - коэфф-т
$M_p$ - вращ. момент, созд. поворотом руля

$$M_p = -l\varphi, \quad l>0$$

$$\varphi = \begin{cases} +\varphi_0, & \text{если } \sigma = \alpha\dot{x} + x > 0 \\ -\varphi_0, & \text{если } \sigma = \alpha\dot{x} + x < 0 \end{cases}$$

$\pm\varphi_0$ - предельные повороты руля.
Руль мгновенно перекладывается в крайне правое положение при $\sigma>0$, в крайнее левое при $\sigma<0$.

$$(4)\quad \ddot{x} + a\dot{x} = k\psi$$




На рисунке изображены два ФП в полуплоскости π+ и π-. То есть в π+ одна система уравнений, в π- другая. Общий ФП склеен по прямой $x+\alpha\cdot\dot{x}=0$. То есть склеенный режим представляет собой склейку двух ФП по какой-либо границе.

$$(5)\quad \psi = \begin{cases} 1; & \sigma > 0 \\ -1; & \sigma < 0 \end{cases}, \quad \sigma = \alpha\dot{x} + x$$

Скользящий режим – режим движения релейной системы вдоль прямой σ (в двумерной системе), сопровождающийся бесконечно частыми переключениями управления.

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} = -k\psi_{\Delta} \\ \sigma = x + \alpha\dot{x} \end{cases} \quad (6)$$

ψΔ – оператор усреднения.

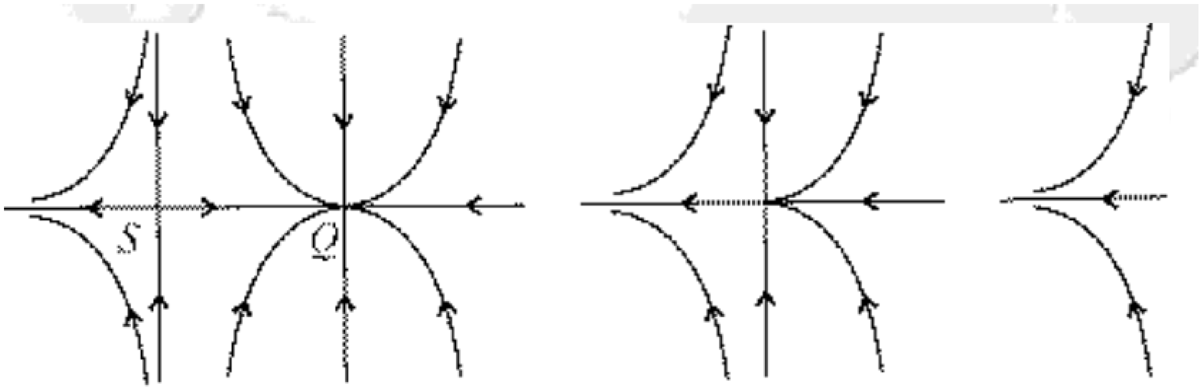
*Скользящий режим – вариант склеенного режима, при котором возникают сходящиеся колебания, сходящиеся к какому-то пределу и при этом их частота бесконечно увеличивается.*

Есть система с 2 особыми точками - узел и седло. Одна точка устойчива, другая полуустойчива (седло). Когда узел с седлом начинаются сближаться и практически падают одна на другую возникает особая область, где производные очень маленькие. То есть это не особая точка, потому что нигде производная не равна нулю. Производная очень мала, там происходит существенное замедление фазовых траекторий.

**Седло-узловая бифуркация (складка).**

Пусть в системе при $\alpha<\alpha^*$ существуют два состояния равновесия: устойчивый узел *Q* и седло *S* (Рис. 6.5, а). При $\alpha=\alpha^*$ происходит слияние узла и седла с образованием негрубого состояния равновесия, называемого *седло-узлом*. (рис. 6.5, б).

При $\alpha>\alpha^*$ положение равновесия исчезает (рис. 6.5, в). Переменная *x* с течением времени стремится к бесконечности.




а б в

2. ***Анализ фазовой траектории на устойчивость по линейному приближению и теоремы Ляпунова. Ляпуновские характеристические показатели (что такое спектр, пример вычисления для особой точки, связь с линейной системой). Ляпуновские показатели аттракторов, определение аттракторов, их виды, правила сигнатур, знаков ляпуновских показателей.***

*Анализ фазовой траектории на устойчивость по линейному приближению и теоремы Ляпунова.*

**Формулировка** понятия устойчивости по Ляпунову. Невозмущенное движение (установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области в (рис. 16.7, б) можно найти такую область г), что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области в при любом сколь угодно большом значении времени *t* (см. § 6.1).
В аналитической записи формулировка понятия устойчивости но Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (установившийся процесс) будет устойчивым, если при заданных положительных сколь угодно малых числах в, можно найти такие положительные числа $\eta_i$ $(i = 1,..., n)$, что при начальных условиях

$$|x_{i0}| < \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

решение дифференциальных уравнений возмущенного движения (переходного процесса) удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)| < \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при любом сколь угодно большом $t$, начиная с некоторого $t = T > 0$.

**4.5.2. Критерий устойчивости Ляпунова по линейному приближению.** Пусть уравнения нелинейной системы представлены в виде

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + R(\mathbf{x}), \quad R(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{4.25}$$

где

$$|R(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^{n} R_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant c \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1+\alpha}. \tag{4.26}$$

Здесь $\alpha$ — малое положительное число, $c$ — положительная константа. Условие (4.26) означает, что разложение нелинейного члена $R(\mathbf{x})$ в (4.25) в ряд Тейлора в начале координат начинается с членов, содержащих квадраты или более высокие степени фазовых координат и их произведения.

Теорема 4.19 (критерий устойчивости Ляпунова нелинейной системы). *Положение равновесия* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *нелинейной системы* (4.25) *асимптотически устойчиво, если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы* $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ *имеют отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если среди указанных корней имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью.*

Источники – Бесекерский праграф 16.1 + Ким 4.5

*Ляпуновские характеристические показатели (ЛП): спектр, пример вычисления для особой точки, связь с линейной системой, геометрический смысл ЛП. ЛП аттракторов: определение аттракторов, их виды, правило сигнатур (знаков ЛП).*

## Показатели Ляпунова.

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t} \qquad \lambda = \lim_{\substack{D(0)\to 0 \\ t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln\frac{D(t)}{D(0)}$$

***$\lambda$ - показатель Ляпунова***

Для *одномерной* системы:

•$\lambda = 0$ - расстояние между точками сохраняется, а система является консервативной.

•$\lambda < 0$ - расстояние между точками уменьшается, а аттрактором могут быть только неподвижные точки. Иначе пишут $\lambda = (-)$

•$\lambda > 0$ - расстояние между точками экспоненциально увеличивается, траектории стремятся к бесконечности. $\lambda = (+)$.

*В двумерной системе* возможные аттракторы - точки и предельные циклы:

($\lambda$1; $\lambda$2) = ( - ; - ) аттрактор - устойчивая стационарная точка (фокус или узел);

($\lambda$1; $\lambda$2) = ( - ; 0 ) аттрактор - предельный цикл.

*В трехмерной системе* возможные аттракторы - точки, предельные циклы, инвариантные торы, странные аттракторы:

($\lambda$1; $\lambda$2; $\lambda$3) = ( - ; - ; - ) аттрактор - фокус или узел);

($\lambda$1; $\lambda$2; $\lambda$3) = ( 0 ; - ; - ) аттрактор - предельный цикл;

($\lambda$1; $\lambda$2; $\lambda$3) = ( 0 ; 0 ; - ) аттрактор - устойчивый инвариантный тор;

($\lambda$1; $\lambda$2; $\lambda$3) = ( + ; 0 ; - ) странный аттрактор.

спектр сигнатуры(знаки) виды аттракторов